

Förderung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Lernbereich M8 4: Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Jahrgangsstufe	8
Fach	Mathematik
Zeitraumen	je Aufgabe 5 bis 10 Minuten
Benötigtes Material	pro Schülerin und Schüler eine Aufgabenstellung (alternativ: Projektion der Aufgabenstellung, z. B. mittels Computer & Beamer <i>oder</i> Dokumentenkamera & Beamer)

Kompetenzerwartungen

M8 4 Bruchterme und Bruchgleichungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ◆ erfassen die Struktur von Bruchtermen angemessener Komplexität und erweitern und kürzen diese, auch unter Anwendung des Distributivgesetzes. Sie erläutern die Verfahren unter Einbeziehung von Analogiebetrachtungen hinsichtlich ihrer in den Jahrgangsstufen 6 und 7 erworbenen Kenntnisse.
- ◆ bringen Bruchterme angemessener Komplexität auf einen gemeinsamen Nenner, um diese zu addieren und zu subtrahieren. Sie multiplizieren und dividieren Bruchterme angemessener Komplexität. Falls möglich, vereinfachen sie die dabei entstehenden Terme.
- ◆ machen die Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten plausibel und wenden diese in einfachen Fällen an.
- ◆ lösen auf der Grundlage eines zunehmend abstrahierenden Verständnisses von Termstrukturen Bruchgleichungen angemessener Komplexität rechnerisch und interpretieren in einfachen Fällen Bruchgleichungen als Schnittprobleme von Funktionsgraphen.
- ◆ lösen Formeln – insbesondere aus den Naturwissenschaften – nach einer Variablen auf.

Hinweise

Die Aufgaben unterstützen das Anliegen, grundlegende Kenntnisse, Vorstellungen, Fähigkeiten und Fertigkeiten systematisch zu wiederholen, zu üben und zu vertiefen. Sie werden sukzessive für jeden Lernbereich angeboten. Entsprechend ihrer Zielsetzung sind die Aufgaben in der Regel nicht dem höchsten Anforderungsbereich zuzuordnen.

Material zur Aufgabe

In der ergänzend zum Download angebotenen Zipdatei befindet sich eine editierbare Version der Aufgaben (Word-Datei).

Aufgaben

Aufgabe 1 (Bruchterme addieren)

In der linken Spalte des folgenden Schemas werden die Schritte bei der Addition zweier Brüche aufgezeigt. Entsprechend dazu soll in der rechten Spalte die Addition zwei Bruchterme durchgeführt werden.

Addition von Brüchen	Beschreibung der Schritte	Addition von Bruchtermen
$\frac{5}{6} + \frac{8}{15}$		$\frac{4}{3x-6} + \frac{x-5}{x^2-2x}$
$= \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{8}{3 \cdot 5}$		$= \frac{4}{3 \cdot (x-2)} + \frac{x-5}{x \cdot (x-2)}$
$= \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5}$		$= \frac{5}{3 \cdot x \cdot (x-2)} + \frac{2 \cdot 8}{x \cdot (x-2)}$
$= \frac{5 \cdot 5 + 2 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5}$		$= \frac{5 + 16}{3 \cdot x \cdot (x-2)}$
$= \frac{25 + 16}{2 \cdot 3 \cdot 5}$		$= \frac{21}{3 \cdot x \cdot (x-2)}$
$= \frac{41}{30}$	vereinfachen	$= \frac{7}{x \cdot (x-2)}$

- a) Ergänze die fehlenden Zähler und Nenner in der rechten Spalte.
- b) Trage in die mittlere Spalte für die einzelnen Schritte stichpunktartige Beschreibungen ein. Verwende dazu u. a. folgende Begriffe:

Zähler / Nenner / Hauptnenner / addieren / faktorisieren / erweitern / beibehalten / vereinfachen

- c) Berechne die Summe gemäß des Verfahrens in der mittleren Spalte: $\frac{x-1}{5x-15} + \frac{2x-1}{-2x+6}$

Aufgabe 2 (Struktur von Termen erfassen und Bruchterme kürzen)

- a) Faktorisiere durch Ausklammern.

(1) $3x - 12$

(2) $6x^3 + 9x^2$

(3) $-5x - 10x^2$

- b) Erläutere in Worten, was es bedeutet, einen Bruch zu kürzen.

- c) Gib an, welche der drei Bruchterme falsch gekürzt wurden, und rechne korrekt.

(1) $\frac{6x}{3x+9} = \frac{2}{9}$

(2) $\frac{x-2}{2x^2-4x} = \frac{-2}{2x-4}$

(3) $\frac{5x^2}{x^3-4x^2} = \frac{5}{x-4}$

Aufgabe 3 (Bruchterme kürzen und erweitern)

a) Bestimme jeweils den fehlenden Nenner bzw. den fehlenden Zähler.

$$(1) \frac{4x}{2x^2 - 3} = \frac{\quad}{6x^3 - 9x} \quad (2) \frac{2x^2}{5} = \frac{6x^3 - 2x^2}{\quad} \quad (3) \frac{x - 4}{x^2 - 2x} = \frac{\quad}{2x^2 - x^3}$$

b) Kürze so weit wie möglich. Faktorisiere dazu den Zähler und den Nenner.

Beispiel:
$$\frac{12x^3 + 3x}{6 + 24x^2} = \frac{3x \cdot (4x^2 + 1)}{6 \cdot (1 + 4x^2)} = \frac{\cancel{3}x \cdot \cancel{(4x^2 + 1)}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{(4x^2 + 1)}} = \frac{x}{2}$$

$$(1) \frac{9x^2 - 9x}{x^2 \cdot (6x - 6)} \quad (2) \frac{15 + 5x^2}{x^3 + 3x} \quad (3) \frac{(2x - 1) \cdot (3x + 3)}{6x - 12x^2}$$

Aufgabe 4 (Formeln nach einer Variablen auflösen)

Löse die folgenden Formeln nach der jeweils angegebenen Variablen auf.

$$\begin{array}{ll} (1) M = 2\pi rh & (\text{nach } r) \\ (2) A = \frac{1}{2}gh & (\text{nach } g) \\ (3) O = 2G + M & (\text{nach } G) \\ (4) E = mgh & (\text{nach } m) \\ (5) A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h & (\text{nach } c) \\ (6) v = \frac{s}{t} & (\text{nach } t) \\ (7) \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} & (\text{nach } U_2) \\ (8) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} & (\text{nach } a) \end{array}$$

Lösungshinweise

Die Lösungshinweise dienen in erster Linie der Unterstützung der Lehrkräfte; sie gehen i. d. R. nicht auf mögliche gleichwertige alternative Lösungswege ein.

zu Aufgabe 1

a) und b)

Addition von Brüchen	Beschreibung der Schritte	Addition von Bruchtermen
$\frac{5}{6} + \frac{8}{15}$		$\frac{4}{3x-6} + \frac{x-5}{x^2-2x}$
$= \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{8}{3 \cdot 5}$	Nenner faktorisieren	$= \frac{4}{3 \cdot (x-2)} + \frac{x-5}{x \cdot (x-2)}$
$= \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5}$	erweitern auf Hauptnenner	$= \frac{4 \cdot x}{3 \cdot x \cdot (x-2)} + \frac{3 \cdot (x-5)}{3 \cdot x \cdot (x-2)}$
$= \frac{5 \cdot 5 + 2 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5}$	Zähler addieren, Nenner beibehalten	$= \frac{4 \cdot x + 3 \cdot (x-5)}{3 \cdot x \cdot (x-2)}$
$= \frac{25 + 16}{2 \cdot 3 \cdot 5}$	vereinfachen	$= \frac{4x + 3x - 15}{3x \cdot (x-2)}$
$= \frac{41}{30}$	vereinfachen	$= \frac{7x - 15}{3x^2 - 6x}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-1}{5x-15} + \frac{2x-1}{-2x+6} &= \frac{x-1}{5 \cdot (x-3)} + \frac{2x-1}{-2 \cdot (x-3)} = \frac{-2 \cdot (x-1)}{-2 \cdot 5 \cdot (x-3)} + \frac{5 \cdot (2x-1)}{-2 \cdot 5 \cdot (x-3)} \\ &= \frac{-2 \cdot (x-1) + 5 \cdot (2x-1)}{-2 \cdot 5 \cdot (x-3)} = \frac{-2x + 2 + 10x - 5}{-2 \cdot 5 \cdot (x-3)} = \frac{8x - 3}{-10x + 30} \end{aligned}$$

zu Aufgabe 2

a) (1) $3x - 12 = 3 \cdot (x - 4)$ (2) $6x^3 + 9x^2 = 3x^2 \cdot (2x + 3)$

(3) $-5x - 10x^2 = -5x \cdot (1 + 2x)$

b) Beim Kürzen eines Bruchs dividiert man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Faktor.

c) (1) Der Bruchterm wurde falsch gekürzt.

$$\text{Korrekt: } \frac{6x}{3x+9} = \frac{3 \cdot 2x}{3 \cdot (x+3)} = \frac{\cancel{3} \cdot 2x}{\cancel{3} \cdot (x+3)} = \frac{2x}{x+3}$$

(2) Der Bruchterm wurde falsch gekürzt.

$$\text{Korrekt: } \frac{x-2}{2x^2-4x} = \frac{x-2}{2x \cdot (x-2)} = \frac{\cancel{x-2}}{2x \cdot (\cancel{x-2})} = \frac{1}{2x}$$

(3) Der Bruchterm wurde korrekt gekürzt.

zu Aufgabe 3

$$\text{a) (1) } \frac{4x}{2x^2-3} = \frac{4x \cdot \cancel{3x}}{(2x^2-3) \cdot \cancel{3x}} = \frac{12x^2}{6x^3-9x} \quad (2) \quad \frac{2x^2}{5} = \frac{2x^2 \cdot \cancel{(3x-1)}}{5 \cdot \cancel{(3x-1)}} = \frac{6x^3-2x^2}{15x-5}$$

$$(3) \quad \frac{x-4}{x^2-2x} = \frac{(x-4) \cdot \cancel{(-x)}}{(x^2-2x) \cdot \cancel{(-x)}} = \frac{4x-x^2}{2x^2-x^3}$$

$$\text{b) (1) } \frac{9x^2-9x}{x^2 \cdot (6x-6)} = \frac{9x \cdot (x-1)}{x^2 \cdot 6 \cdot (x-1)} = \frac{3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}}{2 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{3}{2x}$$

$$(2) \quad \frac{15+5x^2}{x^3+3x} = \frac{5 \cdot (3+x^2)}{x \cdot (x^2+3)} = \frac{5 \cdot \cancel{(x^2+3)}}{x \cdot \cancel{(x^2+3)}} = \frac{5}{x}$$

$$(3) \quad \frac{(2x-1) \cdot (3x+3)}{6x-12x^2} = \frac{(2x-1) \cdot 3 \cdot (x+1)}{-6x \cdot (2x-1)} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{(2x-1)} \cdot (x+1)}{-2 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{(2x-1)}} = -\frac{x+1}{2x}$$

zu Aufgabe 4

$$(1) \quad M = 2\pi r h \Leftrightarrow r = \frac{M}{2\pi h}$$

$$(2) \quad A = \frac{1}{2}gh \Leftrightarrow g = \frac{2A}{h}$$

$$(3) \quad O = 2G + M \Leftrightarrow O - M = 2G \Leftrightarrow G = \frac{1}{2} \cdot (O - M)$$

$$(4) \quad E = mgh \Leftrightarrow m = \frac{E}{gh}$$

$$(5) \quad A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \Leftrightarrow \frac{2A}{h} = a + c \Leftrightarrow c = \frac{2A}{h} - a$$

$$(6) \quad v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t \cdot v = s \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$(7) \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \Leftrightarrow U_1 \cdot R_2 = U_2 \cdot R_1 \Leftrightarrow U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$(8) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{b-c}{bc} \Leftrightarrow \frac{bc}{b-c} = a$$